Сергей Александрович Дёмин — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: sergeidemin@nm.ru

About the authors

Dr Sergey Veryovkin — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: verevkinserg@mail.ru

Sergey Demin — high instructor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: sergeidemin@nm.ru

УДК 519.6

А. И. Пахтеев, А. В. Степанов

ГЕНЕРИРОВАНИЕ РЕКОРДОВ МЕТОДОМ ВЫБОРКИ С ОТКЛОНЕНИЕМ

Обсуждаются методы генерирования рекордов. Соответствующие алгоритмы генерирования основаны на методе выборки с отклонением. Особое внимание уделяется случаю, когда рекорды берутся из популяции, имеющей гамма-распределение.

Methods of record generation are discussed. The corresponding algorithms are based on the rejection method. We concentrate on a case when records are taken from a gamma population.

Ключевые слова: рекорд, гамма-распределение, метод выборки с отклонением, метод обратного преобразования, метод генерации.

Key words: record, gamma-distribution, rejection method, inverse-transform method, generation technique.

Введение

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве. Определим рекордные моменты $L(n)$ и рекордные величины $X(n)$ следующим образом:

$$L(1) = 1,$$
$$L(n+1) = \min\left\{ j : j > L(n),\ X_j > X_{L(n)} \right\},\ X_n = X_{L(n)} \text{ для } n \geqslant 1.$$

Математическая теория рекордов имеет богатую историю и берет свое начало со статьи Чендлера [5]. Развитие теории рекордов является актуальным в связи с различными приложениями, возникающими в метеорологии, гидрологии, в страховом и финансовом бизнесе. Перепады температур и атмосферного давления, паводки рек, спортивные достижения, страховые и финансовые риски, различные модели, связанные с временами обслуживания, коррозией металлов, сопротивлением материалов, — все это и многое другое прекрасно описывается математическим аппаратом этой теории. Более подробную информацию по данной тематике можно найти в книгах [1; 2].

Интересное продолжение теория рекордов получила благодаря недавним статьям, в которых предлагались методы генерирования рекордов [3; 4; 6; 7; 9]. Приведем первый и наиболее простой метод генерирования рекордов. Он состоит в следующем. Генерируется значение первого рекорда $X(1)=X_1$. Далее для $n \geqslant 2$ используется рекурсивный подход, который предполагает, что значение $X(n-1)$ уже получено и наблюдения X_i генерируются до тех пор, пока одно из них, допустим X_j, не будет больше чем $X(n-1)$. Тогда $X(n)=X_j$ становится новой рекордной величиной. Следует отметить, что данный метод ресурсозатратный и медленный, особенно когда необходимо генерировать большое количество рекордов.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывным распределением F. Известно, что последовательность $X(1),\ X(2),\ \ldots$ образует цепь Маркова, причем

$$P(X(n+1) \leqslant x_{n+1} \mid X(n)=x_n)=\frac{F(x_{n+1})-F(X_n)}{1-F(x_n)}\ (x_{n+1}>x_n). \qquad (1)$$

Если обратная функция F^{-1} к функции распределения F может быть найдена явно, то для генерации рекордных величин применяют метод обратных преобразований. Подробно этот метод изложен в книге [8]. Соответствующие алгоритмы генерирования рекордов основаны на формуле (1). Пусть, например, F — стандартное экспоненциальное распределение. Тогда величина $X(n)$ генерируется следующим образом: $-\ln(U_1 U_2 \ldots U_n)$, где U_i $(i=1, \ldots, n)$ — генерации случайных чисел. Если же обратная функция F^{-1} не может быть найдена аналитически, то для генерирования рекордов применяют метод выборки с отклонением. Данный метод можно использовать для генерирования нормальных рекордов и гамма-рекордов. В недавней работе [4] предлагались методы генерирования нормальных рекордов. Соответствующие алгоритмы основаны на методе выборки с отклонением и методе Бокса — Мюллера.

В настоящей работе предлагаются новые методы генерирования гамма-рекордов. Соответствующие алгоритмы основаны на методе выборки с отклонением.

1. Алгоритмы генерирования гамма-рекордов

В нашем исследовании алгоритмы генерирования рекордных величин основаны на методе выборки с отклонением, приводимом ниже.

Метод выборки с отклонением. Цель метода — генерация случайной величины X. Предположим, что величину X с плотностью распределения f не удается генерировать с помощью метода обратного преобразования. В тоже время с помощью метода обратного преобразования удается генерировать величину Y, которая имеет плотность распределения g. Пусть случайные величины X и Y имеют один носитель. Найдем константу $c > 1$, такую что $c = \sup_x \frac{f(x)}{g(x)}$.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Генерируем $Y = y$ (с функцией плотности g) и случайное число $U = u$.

Шаг 2. Если $u \leqslant \frac{f(x)}{cg(x)}$, то полагаем $X = y$. В противном случае возвращаемся к шагу 1.

Отметим, что подбор подходящей случайной величины Y происходит таким образом, чтобы константа $c > 1$ принимала наименьшее возможное значение. Также известно, что среднее число итераций для успешного генерирования очередного значения случайной величины X является геометрической случайной величиной с математическим ожиданием равным c.

Пусть в дальнейшем $F(x \mid \alpha, \beta)$ будет обозначать гамма-распределение с параметрами $\alpha, \beta > 0$, а $f(x \mid \alpha, \beta)$ — соответствующую функцию плотности распределения, т. е.

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \ (x, \alpha, \beta > 0).$$

Из формулы (1) следует, что условная плотность величины $X(n+1)$ при фиксированном значении $X(n)$ имеет вид

$$f_{X(n+1)|X(n)}(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta) = \frac{f(x_{n+1} \mid \alpha, \beta)}{1 - F(x_n \mid \alpha, \beta)} \ (x_{n+1} > x_n). \tag{2}$$

В нашей работе мы не будем рассматривать алгоритмы генерирования при значениях параметров $\alpha = 1$ и $\beta > 0$. Отметим, что при таких параметрах гамма-распределение вырождается в обычное экспоненциальное распределение с параметром β. Алгоритм генерирования для этого случая хорошо известен.

Алгоритм генерирования $X(n)$ при $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 0$. Последовательность $X(n)$ $(n \geqslant 1)$ может быть получена следующим образом.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Генерируем $X(n) = x_n$ с функцией распределения $F(x \mid \alpha, \beta)$ при помощи выборки с отклонением [8, с. 73—75].

Для $n \geqslant 1$ применим метод выборки с отклонением и следующий рекурсивный подход. Предположим, что величина $X(n) = x_n$ уже сгенерирована.

Шаг 2. Генерируем случайное число $U_1 = u_1$. Генерируем $Y = y$ с плотностью $g(y \mid x_n, \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{y - x_n}{\beta}}$ $(y > x_n)$, т. е. получаем значение y из равенства $y = x_n - \beta \log u_1$.

Шаг 3. Генерируем случайное число $U_2 = u_2$. Если $u_2 < \left(\dfrac{y}{x_n}\right)^{\alpha-1}$, то $X(n+1) = y$. Иначе возвращаемся к шагу 2.

Обоснование алгоритма 2. Пусть $g\left(x_{n+1} | x_n, \mu\right) = \dfrac{1}{\mu} e^{-\frac{x_{n+1}-x_n}{\mu}} \left(x_{n+1} > x_n\right)$, где величину $\mu > 0$ выберем позже. Имеем

$$c = \sup_{x_{n+1}>x_n} \frac{f_{X(n+1)|X(n)}\left(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta\right)}{g\left(x_{n+1} \mid x_n, \mu\right)} = \frac{\mu e^{-x_n/\mu}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1-F(x_n \mid \alpha, \beta))} \sup_{x_{n+1}>x_n} x_{n+1}^{\alpha-1} e^{-x_{n+1}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\mu}\right)}. \quad (3)$$

В формуле (3) мы должны предполагать, что $\mu \geqslant \beta$. В противном случае супремум в (3) будет равен бесконечности. Заметим, что супремум в формуле (3) достигается при $x_{n+1} = x_n$, и тогда

$$c = \frac{\mu x_n^{\alpha-1} e^{-x_n/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1-F(x_n \mid \alpha, \beta))}.$$

Пусть $c^* = c(\mu^*) = \inf\limits_{\mu\geq\beta} c(\mu)$. Очевидно, что $\mu^* = \beta$. В этом случае

$$c = \frac{\beta x_n^{\alpha-1} e^{-x_n/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1-F(x_n \mid \alpha, \beta))}$$

и

$$\frac{f_{X(n+1)|X(n)}\left(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta\right)}{c^* g\left(x_{n+1} \mid x_n, \beta\right)} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\alpha-1}.$$

Последнее равенство объясняет выбор шагов 2 и 3 в алгоритме 2. □

Алгоритм моделирования $X(n)$ при $\alpha > 1$ и $\beta > 0$. Пусть

$$\mu_A^* = \frac{2\beta x_n}{x_n - \alpha\beta + \sqrt{\left(x_n - \alpha\beta\right)^2 + 4\beta x_n}}.$$

Последовательность $X(n)$ $(n \geqslant 1)$ может быть получена так.

Алгоритм 3.

Шаг 1. Генерируем $X(1) = x_1$ с распределением $F(x \mid \alpha, \beta)$ при помощи метода выборки с отклонением.

Для $n \geqslant 1$ применим метод выборки с отклонением и следующий рекурсивный подход. Пусть величина $X(n) = x_n$ уже получена.

Шаг 2. Генерируем случайное число $U_1 = u_1$. Генерируем $Y = y$ с плотностью $g\left(y | x_n, \mu_A^*\right) = \dfrac{1}{\mu_A^*} e^{-\frac{y-x_n}{\mu_A^*}} \left(y > x_n\right)$, т. е. получаем значение y из равенства $y = x_n - \mu_A^* \log u_1$.

Шаг 3. Генерируем случайное число $U_2 = u_2$.

Если $u_2 < \left(\dfrac{y(1/\beta - 1/\mu_A^*)}{\alpha - 1}\right)^{\alpha-1} e^{-y(1/\beta-1/\mu_A^*)+\alpha-1}$, то $X(n+1) = y$. Иначе возвращаемся к шагу 2.

Обоснование алгоритма 3. Так как мы снова будем использовать метод выборки с отклонением, то мы должны рассмотреть

$$g\left(x_{n+1} | x_n, \mu\right) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_{n+1}-x_n}{\mu}} \quad \left(x_{n+1} > x_n\right)$$

и исследовать отношение

$$\sup_{x_{n+1}>x_n} \frac{f_{X(n+1)|X(n)}\left(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta\right)}{g\left(x_{n+1} \mid x_n, \mu\right)}, \tag{4}$$

где $\mu > \beta$. Заметим, что теперь $\mu \neq \beta$. В противном случае для $\alpha > 1$ имеем

$$\sup_{x_{n+1}>x_n} \frac{f_{X(n+1)|X(n)}\left(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta\right)}{g\left(x_{n+1} \mid x_n, \beta\right)} = \infty.$$

Обоснование алгоритма 3 разобьем на несколько случаев. В случае (I) предположим, что значение $X(n) = x_n$ мало, а именно $x_n \leqslant (\alpha-1)\beta$.

(I) Пусть $\alpha > 1$, $\mu > \beta$ и $x_n \leqslant (\alpha-1)\beta$. Для $\forall \mu \in (\beta, \infty)$ справедливо неравенство $0 < (\alpha-1)\beta < \dfrac{\alpha-1}{1/\beta - 1/\mu}$. Откуда $x_n < \dfrac{\alpha-1}{1/\beta-1/\mu} \left(\forall \mu > \beta\right)$. Отметим, что супремум в формуле (4) достигается при $x_{n+1} = \dfrac{\alpha-1}{1/\beta-1/\mu}$. Тогда

$$c_A = \frac{\mu e^{-x_n/\mu}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha \left(1-F\left(x_n | \alpha, \beta\right)\right)} \left(\frac{\alpha-1}{1/\beta-1/\mu}\right)^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)}.$$

Выберем μ_A^*, такое что $c_A^* = c(\mu_A^*) = \inf\limits_{\mu>\beta} c_A(\mu)$. Очевидно, что

$$\mu_A^* = \frac{2\beta x_n}{x_n - \alpha\beta + \sqrt{\left(x_n - \alpha\beta\right)^2 + 4\beta x_n}},$$

$$c_A^* = \frac{\mu e^{-x_n/\mu}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha \left(1-F\left(x_n | \alpha, \beta\right)\right)} \left(\frac{\alpha-1}{1/\beta-1/\mu_A^*}\right)^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)}$$

и

$$\frac{f_{X(n+1)|X(n)}\left(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta\right)}{c_A^* g\left(x_{n+1} \mid x_n, \mu_A^*\right)} = \left(\frac{x_{n+1}(1/\beta-1/\mu_A^*)}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1} e^{-x_{n+1}(1/\beta-1/\mu_A^*)+\alpha-1}.$$

Последнее равенство показывает справедливость выбора шагов 2 и 3 в алгоритме 3 при $\alpha > 1$, $\mu > \beta$ и $x_n \leqslant \left(\alpha-1\right)\beta$.

(II) Пусть теперь $\alpha > 1$, $\mu > \beta$ и $x_n > \left(\alpha-1\right)\beta$. Условие $\mu > \beta$ можно представить в виде двух различных условий:

(A) $\mu \in \left(\beta, \dfrac{\beta x_n}{x_n - (\alpha-1)\beta}\right)$ или $x_n < \dfrac{\alpha-1}{1/\beta-1/\mu}$;

(B) $\mu > \dfrac{\beta x_n}{x_n-(\alpha-1)\beta}$ или $x_n > \dfrac{\alpha-1}{1/\beta-1/\mu}$.

(A) Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 0$ и $\beta < \mu < \frac{\beta x_n}{x_n - (\alpha-1)\beta}$. Этот случай напоминает случай (I), так как супремум в (4) достигается при $x_n = \frac{\alpha-1}{1/\beta - 1/\mu}$. Откуда вытекают соотношения

$$\mu_A^* = \frac{2\beta x_n}{x_n - \alpha\beta + \sqrt{(x_n - \alpha\beta)^2 + 4\beta x_n}},$$

$$c_A^* = \frac{\mu e^{\frac{-x_n}{\mu_A^*}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha\left(1 - F(x_n|\alpha,\beta)\right)}\left(\frac{\alpha-1}{1/\beta - 1/\mu_A^*}\right)^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)},$$

и

$$\frac{f_{X(n+1)|X(n)}(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta)}{c_A^* g(x_{n+1} \mid x_n, \mu_A^*)} = \left(\frac{x_{n+1}(1/\beta - 1/\mu_A^*)}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1} e^{-x_{n+1}(1/\beta - 1/\mu_A^*)+\alpha-1}.$$

(B) Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 0$ и $\mu > \frac{\beta x_n}{x_n - (\alpha-1)\beta}$. Очевидно, что супремум в (4) достигается при $x_{n+1} = x_n$. Аргументация здесь такая же, как в обосновании алгоритма (2). Можно показать, что

$$\mu_B^* = \frac{\beta x_n}{x_n - (\alpha-1)\beta}, \quad c_B^* = \frac{\mu_B^* x_n^{\alpha-1} e^{-x_n/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha (1 - F(x_n \mid \alpha, \beta))},$$

и

$$\frac{f_{X(n+1)|X(n)}(x_{n+1} \mid x_n, \alpha, \beta)}{c_B^* g(x_{n+1} \mid x_n, \mu_B^*)} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right)}.$$

Теперь следует решить, какой из двух алгоритмом лучше, а именно алгоритм, описанный в части (II) (A) или в части (II) (B)? Очевидно, что стоит выбирать тот алгоритм, для которого соответствующее значение c_A^* или c_B^* меньше.

Лемма 1. *Для любых* $\alpha > 1$, $\beta > 0$ *и* $x_n > (\alpha-1)\beta$ *справедливо неравенство* $c_A^* \leqslant c_B^*$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{c_A^*}{c_B^*} = \frac{\mu_A^*}{\mu_B^*} \frac{e^{x_n(1/\beta - 1/\mu_A^*)}}{\left(x_n(1/\beta - 1/\mu_A^*)\right)^{\alpha-1}} (\alpha-1)^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)}.$$

Пусть

$$x_n\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\mu_A^*}\right) = (\alpha-1)(1-z),$$

где $z = \frac{2\beta}{x_n - \alpha\beta + 2\beta + \sqrt{(x_n - \alpha\beta)^2 + 4\beta x_n}}$. Тогда $\frac{c_A^*}{c_B^*} = \frac{\mu_A^*}{\mu_B^*} \frac{e^{-(\alpha-1)z}}{(1-z)^{\alpha-1}}$.

Отметим, что

$$\frac{\mu_A^*}{\mu_B^*} = \frac{2x - 2(\alpha-1)\beta}{x_n - \alpha\beta + \sqrt{(x_n - \alpha\beta)^2 + 4\beta x_n}} \le 1 - (\alpha-1)z^2.$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы проверить справедливость неравенства $0 < z < \frac{2}{1+\sqrt{4\alpha-3}} < 1$ при $0 < z < 1$. Очевидно, что при $\alpha > 1$ справедливо неравенство

$$Q(z,\alpha) = \left(1-(\alpha-1)z^2\right)e^{-(\alpha-1)z}(1-z)^{-(\alpha-1)} \leqslant 1. \tag{5}$$

Отметим также, что $Q(z,1) = 1 \ (0 < z < 1)$ и

$$Q_\alpha^{'}(z,\alpha) = Q(z,\alpha)\left[\frac{-z^2}{1-(\alpha-1)z^2} - z - \ln(1-z)\right].$$

Поскольку $Q(z,\alpha) > 0,\ 1-(\alpha-1)z^2 > 0$ и $-z-\ln(1-z) < 0 \ (0 < z < 1)$, то получаем, что $Q_\alpha^{'}(z,\alpha) < 0$. Это доказывает справедливость неравенства (5). Таким образом, лемма 1 доказана. □

Сравнивая два метода генерирования, основанных на алгоритмах (II) (A) и (II) (B), мы приходим к выводу, что метод, основанный на алгоритме (II) (A), лучше. Объединяя части (I) и (II) (A), завершаем обоснование алгоритма 3. □

2. Апробация результатов

Пользуясь вышеизложенными методами, авторы статьи генерировали гамма-рекорды для различных значений параметров $\alpha, \beta > 0$. Для различных значений параметров был получен 1 миллион генераций вектора $(X(1), \ldots, X(10))$. Результаты генераций были сравнены с оценками, основанными на векторе выборочных средних значений и ковариационной матрице. Данные оценки, в свою очередь, были полученными в результате численного интегрирования. Результаты совпали с высокой степенью точности.

Список литературы

1. *Невзоров В. Б.* Рекорды. Математическая теория. М., 2000.
2. *Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N.* Records. John Wiley & Sons. N. Y., 1998.
3. *Bairamov I., Stepanov A.* Numbers of near bivariate record-concomitant observations // Journal of Multivariate Analysis. 2011. № 102. P. 908—917.
4. *Balakrishnan N., So H. Y., Zhu X. J.* On Box-Muller Transformation and Simulation of Normal Record Data // Communication in Statistics-Simulation and Computations. 2016 (в печати).
5. *Chandler K. N.* The distribution and frequency of record values // J. Royal Statist. Soc. 1952. Ser. B, 14. P. 220—228.

6. *Luckett D. J.* Statistical Inference Based on Upper Record Values. PhD thesis. The College of William and Mary, 2013.

7. *Nevzorov V. B., Stepanov A.* Records with confirmation // Statistics & Probability Letters. 2014. № 95. P. 39—47.

8. *Ross S. M.* Simulation. Elsevier, 2006.

9. *Stepanov A., Berred A., Nevzorov V. B.* Concomitants of records: Limit results, generation techniques, correlation // Statistics&Probability Letters. 2016. № 109. P. 184—188.

Об авторах

Артем Игоревич Пахтеев — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: mir123i3@gmail.com

Алексей Васильевич Степанов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: alexeistep45@mail.ru

About the authors

Artem Pakhteev — PhD Student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: mir123i3@gmail.com

Prof. Alexei Stepanov — I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: alexeistep45@mail.ru

УДК 681.587.73, 62-523.8

С. А. Норсеев

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТОМ АНТРОПОМОРФНОГО ТИПА ДЛЯ РАБОТЫ НА МКС

Разрабатываются и улучшаются алгоритмы и методы управления роботами, занимающимися выполнением штатных технологических операций на борту международной космической станции.

The article is devoted to the development and improvement of algorithms and robot control methods, staff involved in the implementation of technological operations on board the International Space Station.

Ключевые слова: робот антропоморфного типа, групповое управление роботами, международная космическая станция, назначение, столкновение.

Keywords: anthropomorphic robot type, robot group control, the International Space Station, destination, collision.